Prof. Dr. Viola Weiß

Stochastische Modelle zur Beschreibung von Zellteilungsprozessen und Bruchstrukturen

Forschungsgebiet und Forschungsinhalte

1. **Forschungsgebiet: Stochastische Geometrie**

Die stochastische Geometrie ist ein relativ junges Teilgebiet der Mathematik, welches Methoden und Modelle aus der Geometrie und der Stochastik miteinander verknüpft. In der modernen stochastischen Geometrie, die um 1970 durch D.G. Kendall, K. Krickeberg, G. Matheron und R.E. Miles begründet wurde, werden Objekte untersucht, die eine zufällige Form haben und die in zufälliger Anzahl und zufälliger Lage vorkommen. Es gibt eine Vielzahl von ganz unterschiedlichen Beispielen für solche Strukturen: Zellgewebe, Fasern oder Einschlüsse in Materialien, Bruchstrukturen und geologische Formationen, Schnitte durch poröse Medien, gerissener Boden sowie Muster, die durch Felder, Wälder oder Straßen in der Landschaft gebildet werden. Die mathematische Beschreibung einer derartigen Struktur erfolgt durch die Entwicklung eines stochastischen Modells. Charakteristika und Kenngrößen des Modells können dann auf die Struktur übertragen werden. Das ist hilfreich, weil oftmals durch Lage, Intensität oder auch Form der Objekte Eigenschaften der Struktur bestimmt werden. So ist zum Beispiel die Festigkeit von Papier abhängig von der Intensität der Fasern und von ihrer Länge. Solche Untersuchungen sind häufig sehr kompliziert durch die zufällige Gestalt und die zufällige Anordnung der Objekte.
Eine wichtige Rolle nimmt die Modellklasse der zufälligen Mosaike in der stochastischen Geometrie ein.
Das Gebiet der stochastischen Geometrie wird ausführlich und mathematisch tiefliegend dargestellt in [11]. Eine Vielzahl von unterschiedlichen Modellen wird in [1] behandelt. Statistische Verfahren und Methoden der Bildverarbeitung werden in [9] und [10] untersucht.

Abb. 1: Craquelé-Glasur
auf einer Keramikvase

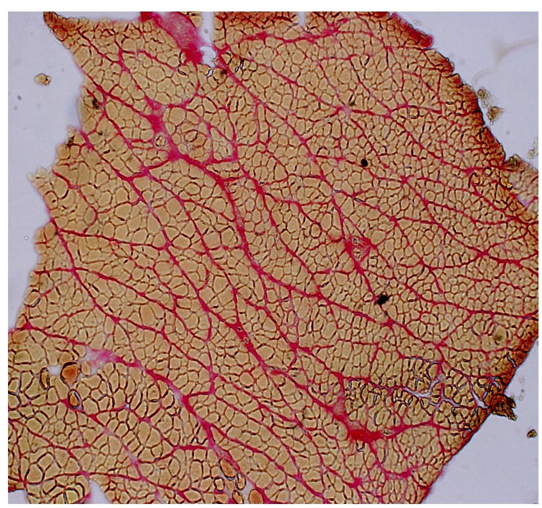

Abb. 2: Zellstruktur
in einem Rattenmuskel

Abb. 3: Basaltsäulen
in Giant's Causeway, Nordirland

Abb 4: Tessellated pavement
Ku-ring-gai Chase Nationalpark, Australien

2. **Forschungsgegenstand: Zufällige Mosaike**

   Ein zufälliges Mosaik ist ein stochastisches Modell, welches eine zufällige Zerlegung (tessellation) eines Gebietes - oder auch der Ebene (oder des Raumes) - beschreibt. Die dabei entstehenden Bereiche (auch Zellen des Mosaiks genannt) überdecken das Gebiet vollständig und berühren sich nur an ihren Rändern, sie dürfen sich also nicht überlappen.

   Man findet solche Zerlegungen häufig in Natur und Technik, so zum Beispiel in den Materialwissenschaften bei Riss- und Bruchstrukturen, in der Biologie bei Zell- oder Gewebestrukturen oder auch in der Geologie bei Gesteinsformationen. Die Abbildungen 1 - 4 zeigen Beispiele für solche Zerlegungen.

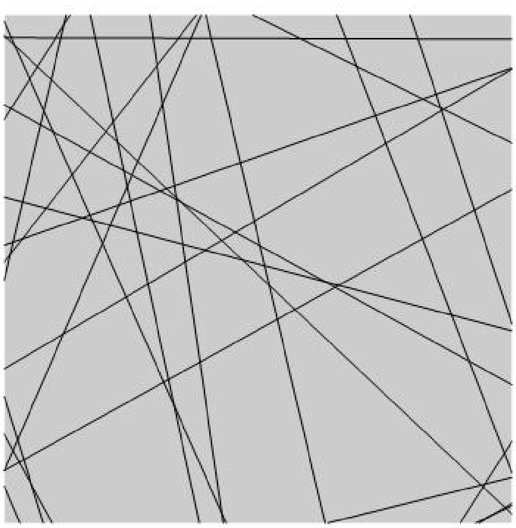

Abb.5: Poissonsches Geradenmosaik

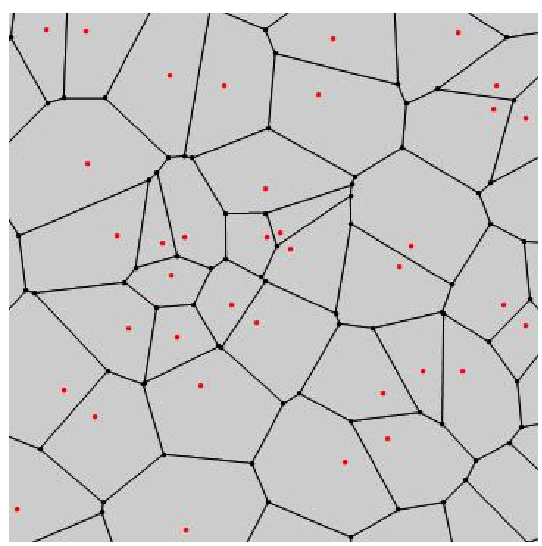

Abb. 6: Voronoi-Mosaik
(mit Keimpunkten)

Klassische und bereits sehr gut untersuchte Modelle sind Gerademosaike (Abbildung 5) und Voronoi-Mosaike (Abbildung 6). Solche Modelle können auch in höheren Dimensionen betrachtet werden. Ein Voronoi-Mosaik entsteht aus einer zufälligen Ansammlung von Keimpunkten. Die zu einem Keimpunkt gehörige Voronoi-Zelle wird von all den Punkten der Ebene gebildet, die zu diesem Keimpunkt näher liegen als zu allen anderen Keimpunkten. Man kann die Zelle eines Voronoi-Mosaiks auffassen als 'Einflussgebiet' des zugehörigen Keimpunktes.
Durch die Vielfalt und Unterschiedlichkeit möglicher und real vorkommender Zerlegungen ergibt sich ein großer Bedarf an der Entwicklung von weiteren Modellen.

3. **Forschungsinhalte:**

   (a) **STIT tessellations**

   Betrachtet man die Riss-Struktur auf der Keramikoberfläche in Abbildung 7 (die Ansicht ist ein Ausschnitt aus Abbildung 1), so erkennt man schnell, dass weder durch ein Geradenmosaik noch durch ein Voronoi-Mosaik eine solche Struktur näherungsweise zufriedenstellend modelliert werden kann. Generell sind die klassischen Mosaik-Modelle wenig geeignet zur Beschreibung von zufälligen Strukturen, die durch fortgesetzte Teilung der Zellen entstehen.

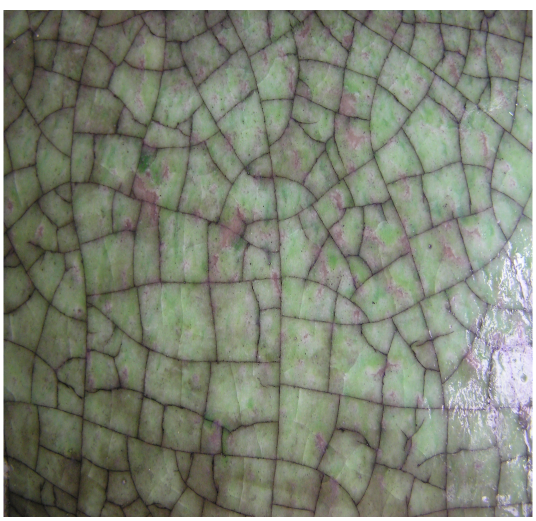

Abb.7: Riss-Struktur (Craquelé-Glasur)

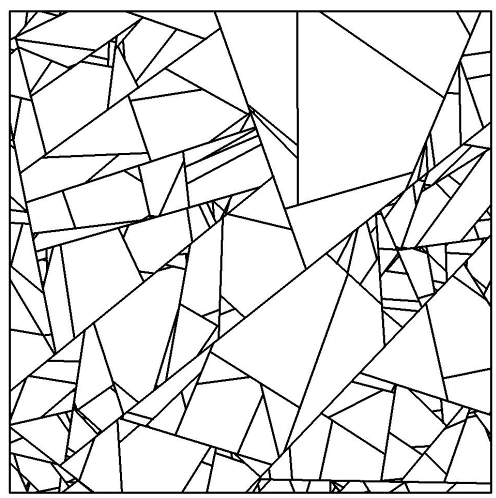

Abb. 8: Isotropes STIT tessellation in der Ebene

   Ein STIT tessellation kann man vereinfacht wie folgt konstruieren: Man startet mit einem Gebiet, z.B. mit einem Quadrat, welches sich nach Ablauf einer zufälligen Lebensdauer in zwei Zellen teilt. Unabhängig voneinander teilen sich dann diese Zellen erneut nach Ablauf ihrer Lebensdauer usw. Konkrete Festlegungen sowohl für die Lebensdauer der Zellen als auch für die Art und Weise der Zellteilung führen zum Modell der sogenannten STIT tessellations. Abbildung 8 zeigt eine Simulation für eine solche Struktur. Dabei ist die Lebensdauer einer Zelle abhängig von ihrem Umfang: Je größer der Umfang einer Zelle ist, umso größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Zelle geteilt wird. Die Teilung erfolgt dann, indem eine Gerade mit zufälliger Lage und Richtung auf die Zelle gelegt wird. Das STIT Modell wurde in [6], [7], [4] entwickelt und mathematisch beschrieben. Es kann auch in höheren Dimensionen betrachtet werden. STIT Mosaike besitzen etliche 'gute' stochastische Eigenschaften. Eine dieser Eigenschaften ist eine **St**abilität bezüglich **It**eration, was den Namen für das Modell erklärt. Diese Stabilität bedeutet folgendes: Lagert man in die Zellen eines STIT Mosaiks wiederum Ausschnitte von STIT Mosaiken ein, so entsteht im Ergebnis erneut ein STIT Mosaik.

Die STIT Mosaike wurden in den letzten Jahren eingehend untersucht. Es konnten vielfältige Resultate gewonnen werden. Zum einen gelang eine sehr detaillierte Beschreibung der topologischen und kombinatorischen Zusammenhänge innerhalb des Mosaiks und es wurden Mittelwerte und Verteilungen spezieller Mosaikbausteine bestimmt, siehe u.a. [12]. Zum anderen wurde der zeitabhängige Prozess der fortgesetzten Zellteilung untersucht, siehe u.a. [5].
Vorallem im Bereich der Geologie werden STIT tessellations inzwischen als Referenzmodelle für reale Riss-Strukturen verwendet.

(b) **Mosaike, die nicht seitentreu sind**
Die klassischen Modelle für zufällige Mosaike beschreiben Zerlegungen, die seitentreu sind. In seitentreuen Mosaiken haben benachbarte Zellen immer eine gemeinsame Seite. Setzt man die Zellen aber 'verschoben' aneinander, gilt das nicht mehr und man erhält eine Struktur, die nicht seitentreu ist. Ein wichtiges Beispiel dafür sind die STIT tessellations. Durch diese Verschiebung der Zellen entsteht eine Vielzahl von neuen Effekten. Erste Untersuchungen für nicht seitentreue Mosaike in der Ebene (und später auch für nicht flächentreue Mosaike im Raum) wurden in [13], [3] durchgeführt und dann in weiteren Arbeiten fortgesetzt. Außerdem wurden für wichtige Kenngrößen solcher Strukturen (zum Beispiel für die mittlere Anzahl von Kanten, die von einem 'typischen' Knoten ausgehen) Parameterbereiche bestimmt, siehe [2].

(c) **Column tessellations**
Geologische Strukturen wie in Abbildung 3 führten zur Entwicklung eines weiteren Modells, der sogenannten Column tessellations, siehe [8]. Dieses räumliche Modell basiert auf einem Mosaik in der Ebene. Für jede Zelle des ebenen Mosaiks betrachtet man einen unendlich langen Zylinder (Säule = column), dessen Querschnitt dieser Zelle entspricht. Jeder Zylinder wird nun durch Schnitte (parallel zum Ausgangsmosaik) geteilt. Dadurch entstehen die Zellen des räumlichen Mosaiks, die alle gerade Prismen sind. Die Teilung einer Säule kann in gleichen oder aber auch zufälligen Abständen erfolgen. Außerdem werden in diesem Modell benachbarte Säulen immer unabhängig voneinander geteilt. Daher sind Column tessellations nicht flächentreu. Aus geeignet gewählten Parametern des ebenen Mosaiks lassen sich nun eine Vielzahl von Größen des räumlichen Mosaiks bestimmen, siehe [8]. Diese Fragestellungen sind eng verknüpft mit dem Teilgebiet der Stereologie. Es befaßt sich mit der Problematik, wie man aus der Kenntnis eines ebenen Schnitts durch eine räumliche Struktur Informationen über die räumliche Struktur zurückgewinnen kann.

Literatur (Auszug):

[1] Chiu, S. N., Stoyan, D., Kendall, W.S. and Mecke, J.: *Stochastic geometry and its applications.* Wiley & Sons, Chichester, 2013.

[2] Cowan, R. and Weiß, V.: Constraints on the fundamental topological parameters of spatial tessellations. Mathematische Nachrichten, **288**, 540–565, 2015.

[3] Cowan, R. and Weiß, V.: Line segments which are unions of tessellation edges. Image Analysis and Stereology, **37/1**, 83–98, 2018.

[4] Mecke, J., Nagel, W. and Weiß, V.: A global construction of homogeneous random planar tessellations that are stable under iteration. Stochastics. An International Journal of Probability and Stochastic Processes, **80**, 51–67, 2008.

[5] Nagel, W., Nguyen, N. L., Thäle, C. and Weiß, V.: A Mecke-type formula and Markov properties for STIT tessellation processes. ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat., **14**, 691–718, 2017.

[6] Nagel, W. and Weiß, V.: Limits of sequences of stationary planar tessellations. Adv. Appl. Prob. (SGSA), **35**, 123-138, 2003.

[7] Nagel, W. and Weiß, V.: Crack STIT tessellations - characterisation of the stationary random tessellations which are stable with respect to iteration. Adv. Appl. Prob. (SGSA), **37**, 859–883, 2005.

[8] Nguyen, N. L., Weiß, V. and Cowan, R.: Column tessellations. Image Analysis and Stereology, **34/2**, 87–100, 2015.

[9] Ohser, J. and Mücklich, F.: *Statistical analysis of microstructures in material science.* Wiley, 2000.

[10] Ohser, J. and Schladitz, K.: *3D images of material structures. Processing and Analysis.* Wiley, 2009.

[11] Schneider, R. and Weil, W.: *Stochastic and integral geometry.* Springer, 2008.

[12] Thäle, C. and Weiß, V.: The combinatorial structure of spatial STIT tessellations. Discrete and Computational Geometry, **50**, 649–672, 2013.

[13] Weiß, V. and Cowan, R.: Topological relationships in spatial tessellations. Advances in Applied Probability (SGSA), **43**, 963–984, 2011.

Nachweis der Abbildungen:

Abb 1 und 7 – Foto: Gisela Weil

Abb 2 – Foto: Ida Eržen

Abb 3 – Foto: Richard Cowan

Abb 4 – Foto: Viola Weiß

Abb 5, 6 und 8 – Simulationen: Richard Cowan